

UFSM – CT – DELC

Analogia entre Sistemas Elétricos e Mecânicos

ELC 1021 – Estudo de Casos em Engenharia Elétrica

Introdução

As equações diferenciais que governam as tensões e correntes em um sistema elétrico são semelhantes as equações diferenciais que modelam o movimento de um sistema mecânico.

Um sistema mecânico possui um circuito elétrico análogo e vice-versa. Na Tabela 1, são apresentados os componentes elétricos e os componentes mecânicos que estão associados. Existem duas analogias possíveis de serem realizadas.

Tabela 1 – Equivalência entre os componentes elétricos e mecânicos.

Sistema Elétrico	Sistema Mecânico	
	Primeira Analogia	Segunda Analogia
C	m	$\frac{1}{k}$
L	$\frac{1}{k}$	m
R	$\frac{1}{b}$	b
V	v	F
I	F	v

Conversão de um Sistema Mecânico para Elétrico

Os passos para a conversão de um sistema mecânico para um sistema elétrico usando a primeira analogia (veja a Tabela 1) são os seguintes:

1. Cada massa do sistema mecânico é substituída por um capacitor no sistema elétrico análogo. Todos estes capacitores, que representam as massas, são aterrados. A tensão inicial nestes capacitores é igual à velocidade inicial das massas no sistema mecânico.
2. Encontram-se os análogos elétricos dos componentes mecânicos restantes: molas são substituídas por indutores e amortecedores são substituídos por resistores.
3. As ligações entre os componentes elétricos são realizadas, observando-se como o análogo mecânico está ligado aos demais elementos mecânicos. Por exemplo, se uma mola está ligada a duas massas, no análogo elétrico o indutor análogo da mola deve estar conectado aos capacitores análogo das massas.
4. As fontes de corrente representando as forças no sistema mecânico são incluídas no diagrama elétrico.

A seguir será apresentado um exemplo para ilustrar a aplicação do método. Na são apresentados os símbolos usados nos diagramas dos sistemas mecânicos.

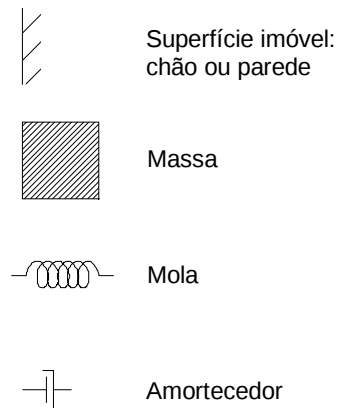


Figura 1 – Símbolos usados na representação dos sistemas mecânicos.

Seja um sistema mecânico como o apresentado na Figura 2. No diagrama estão indicadas as massas (m_x), as constantes das molas (k_x) e as constantes de amortecimento (b_x).

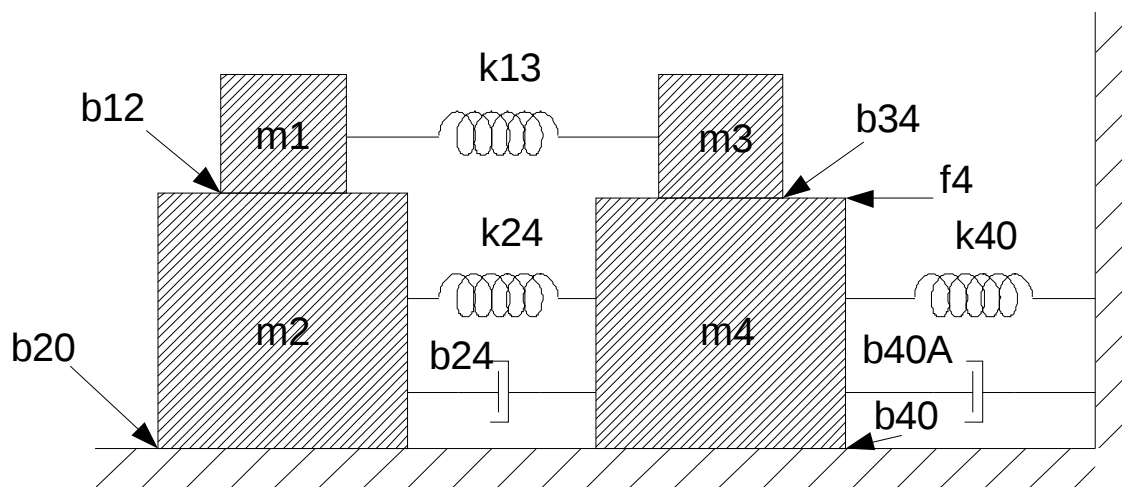


Figura 2 – Exemplo de um sistema mecânico.

O primeiro passo para encontrar o análogo elétrico do sistema mecânico da Figura 2 é associar a cada uma das massas um capacitor. O diagrama mecânico da Figura 2 apresenta quatro massas, m_1 a m_4 (Figura 3). No circuito elétrico análogo haverá 4 capacitores, como mostra a Figura 4. Cada um dos destes capacitores, associados às massas, é aterrado. Cada um dos capacitores estará carregado com uma tensão que é igual a velocidade da correspondente massa associada.

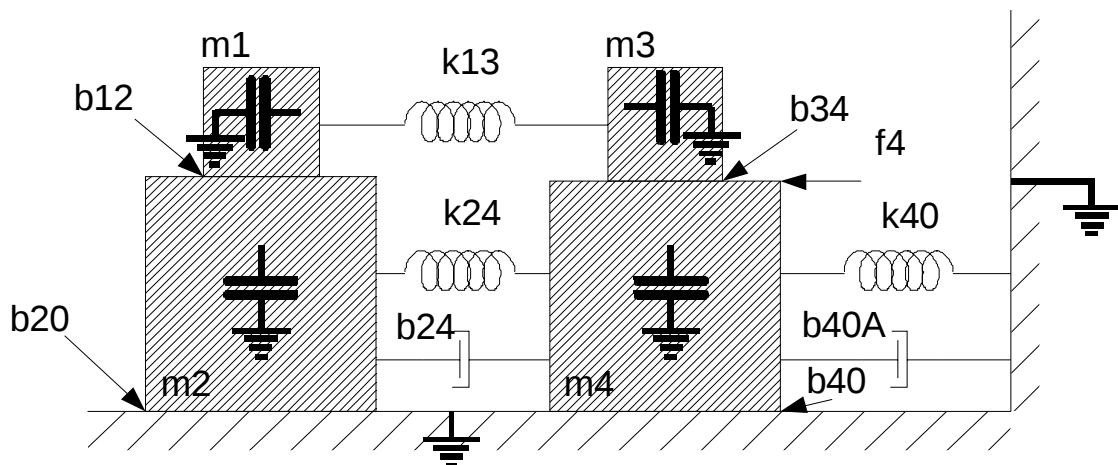


Figura 3 - As massas do sistema mecânico são substituídas por capacitores no análogo elétrico.

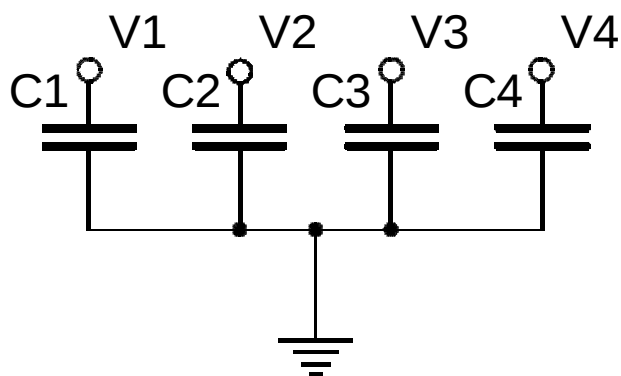


Figura 4 – Substituem-se as massas por capacitores. As tensões nos capacitores são análogas as velocidades das massas.

A seguir, os outros componentes mecânicos são substituídos pelos componentes elétricos análogos, como mostra a Figura 5. As molas têm indutores no diagrama elétrico análogo e os amortecedores e atritos possuem resistores.

Na Figura 5, observa-se que as superfícies imóveis estarão associadas ao terra do diagrama elétrico análogo.

Da Tabela 1, temos que os valores das indutâncias serão iguais ao recíproco das constantes das molas, que estão associados. Os valores dos resistores serão iguais ao recíproco das constantes de amortecimento.

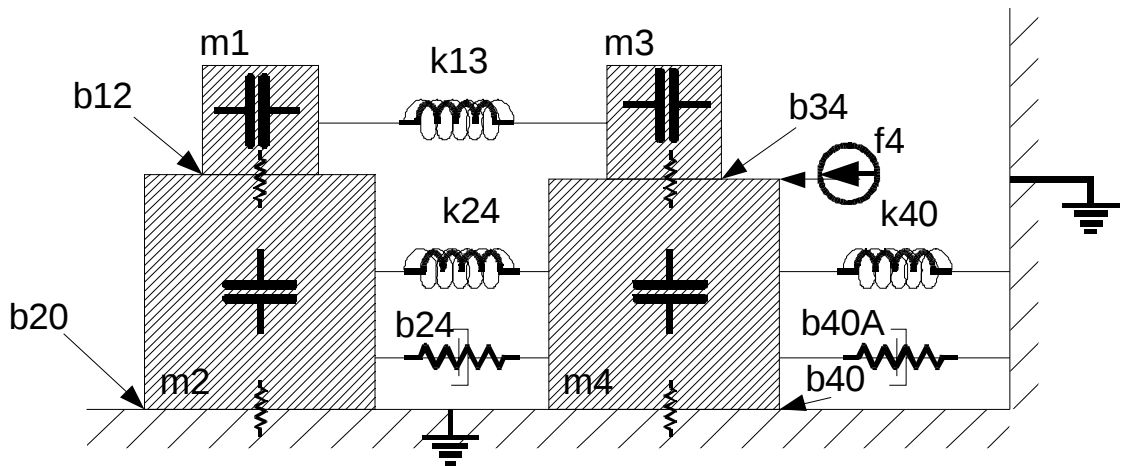


Figura 5 – Todos os capacitores representando as massas são aterrados.

A seguir, cada um dos componentes elétricos é conectado para formar o análogo elétrico, como mostra a Figura 6. Se um componente mecânico é ligado entre duas massas, como a mola com a constante k_{13} , ligado às massas m_1 e m_2 , no análogo elétrico, o componente elétrico associado, indutor L_{13} , será conectado entre os capacitores C_1 e C_3 representando as respectivas massas. Observa-se que o terminal do capacitor ligado ao terra não participa das ligações. Se um componente mecânico está ligado a uma superfície imóvel, como o chão ou uma parede, então o componente elétrico análogo terá um dos seus terminais ligado ao terra. Fontes de corrente representando forças aplicadas no sistema mecânico, tem também um dos seus terminais ligados no terra do circuito elétrico análogo.

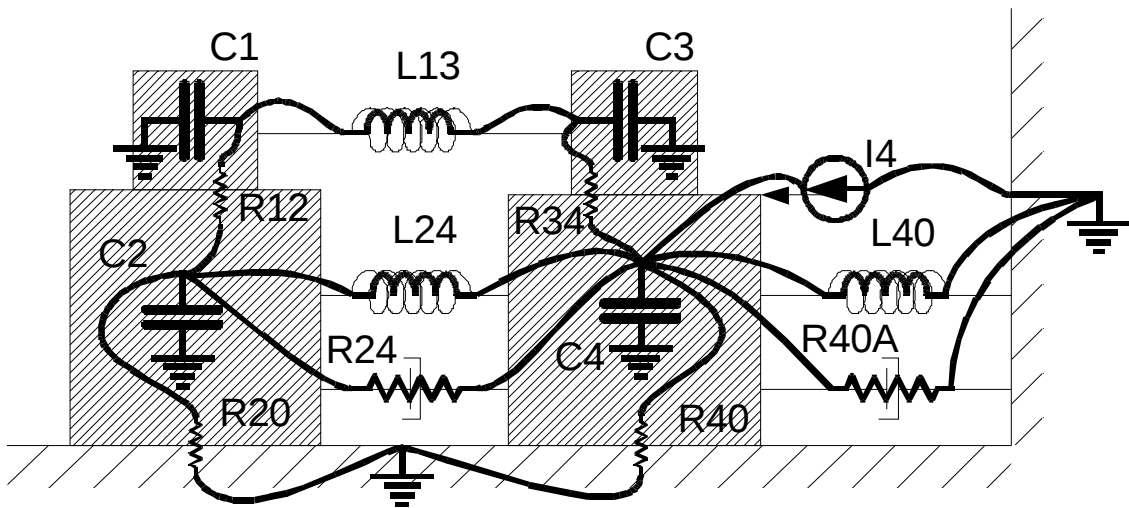


Figura 6 – Os outros componentes são conectados.

Na Figura 7, é apresentado o análogo elétrico para o sistema mecânico da Figura 2. Neste sistema, as tensões são análogas às velocidades dos componentes mecânicos e as correntes têm como análogo as forças aplicadas no sistema mecânico.

O comportamento do sistema mecânico da Figura 2 pode ser determinado com os resultados da simulação do circuito análogo da Figura 7.

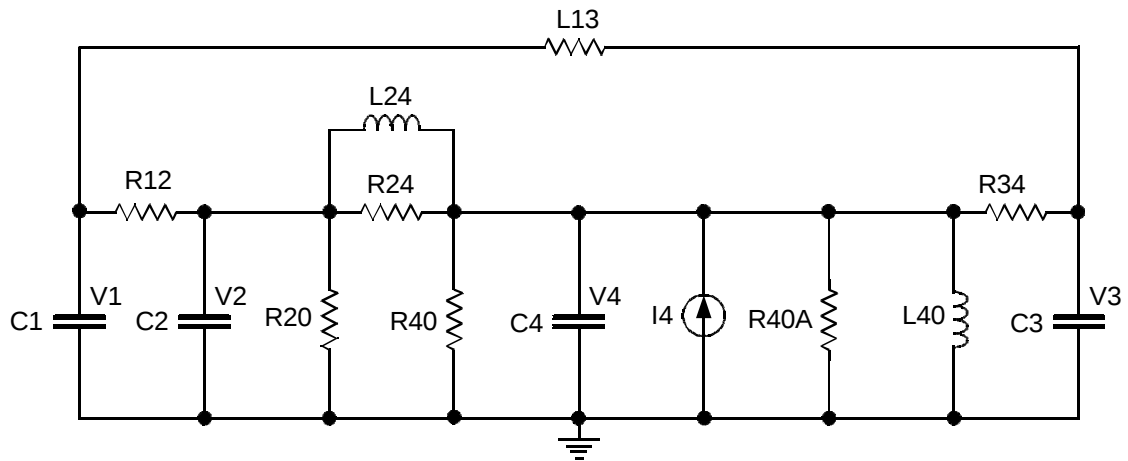


Figura 7 – Circuito elétrico análogo do sistema mecânico da Figura 2.

A seguir será apresentado um exemplo de um sistema mecânico com uma massa, uma mola e um amortecedor. A solução do problema será apresentada com a solução da equação diferencial do sistema mecânico e com a solução do sistema elétrico análogo ao sistema mecânico.

Problema 1 - Seja o sistema mecânico apresentado na Figura 8. Considere a massa de $m = 0,5 \text{ kg}$, a constante da mola $k = 100 \text{ N/m}$, o coeficiente de amortecimento $b = 0,5 \text{ N/(m} \cdot \text{s}^{-1})$. O sistema está submetido a força da gravidade. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Qual a velocidade e a posição da massa m para $t \geq 0 \text{ s}$.

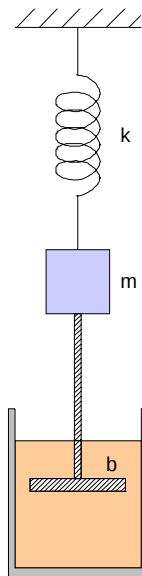


Figura 8 – Ilustração de um sistema mecânico composto de uma massa, uma mola e um sistema amortecedor.

Neste sistema, a força sobre a massa m é dado por:

$$ma = F$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - v \frac{dx}{dt} + mg$$

ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = g$$

A posição x da massa m é a solução desta equação diferencial ordinária de 2ª ordem. Esta equação pode ser resolvida por um método analítico ou numérico. Os resultados da solução numérica pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem são apresentados na Figura 9 e na Figura 10.

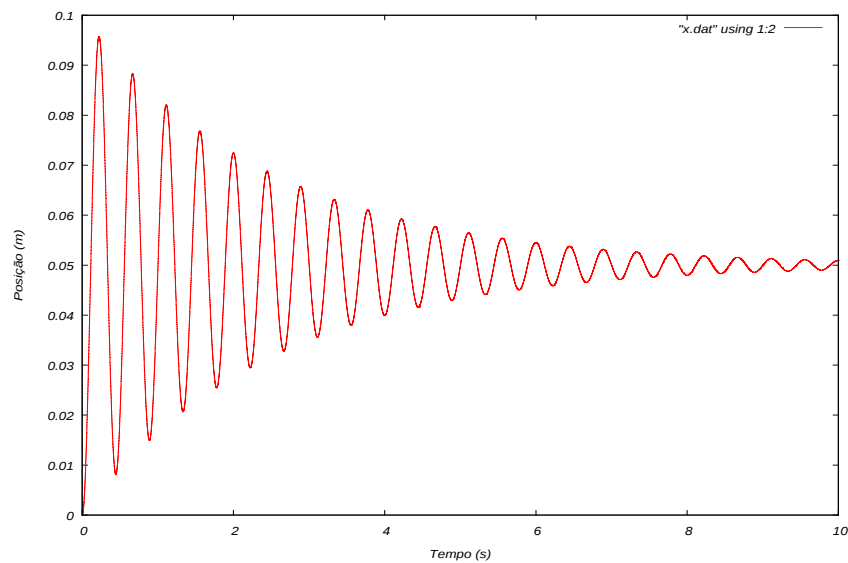


Figura 9 – Posição da massa m em função do tempo para o sistema massa-mola-amortecedor do exemplo.

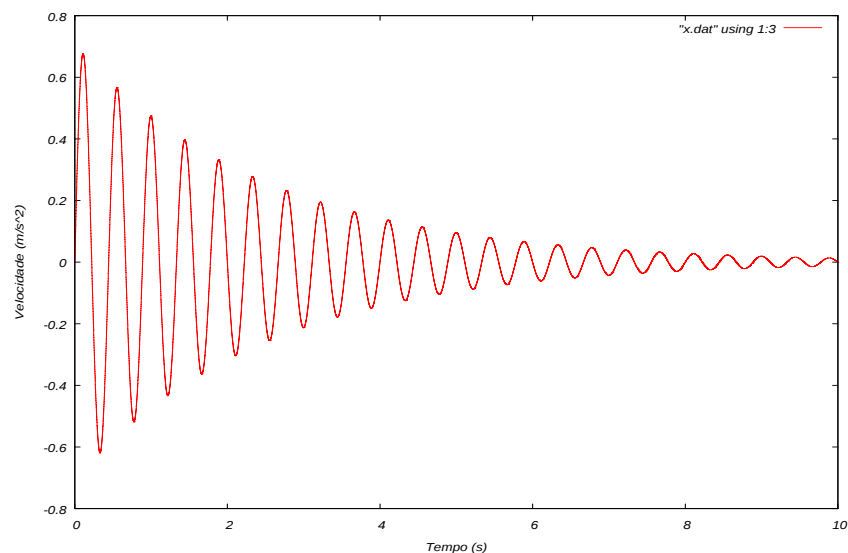


Figura 10 – Gráfico da velocidade da massa m do sistema massa-mola-amortecedor do exemplo.

Este mesmo sistema pode ser resolvido, convertendo o sistema mecânico para o análogo elétrico e a solução deste aplica-se no sistema mecânico original.

O análogo elétrico para o sistema massa-mola-amortecedor, submetido a força da gravidade, é apresentado na Figura 11. Nesta figura, a capacitância C_m está associada à massa, a indutância L_k à mola e a resistência R_b ao amortecedor. A fonte de corrente I_g é o análogo da força da gravidade.

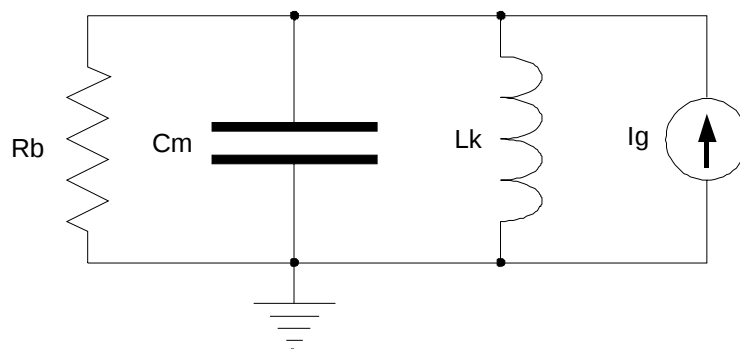


Figura 11 – Análogo elétrico para um sistema massa-mola-amortecedor submetido a força da gravidade.

Este circuito foi simulado usando um programa SPICE. A descrição do circuito é apresentada na Figura 12. Na descrição do circuito, a tensão sobre o capacitor inicial foi descrita por $IC = 0.0V$, pois a velocidade inicial da massa m deste exemplo é 0 m/s . A corrente inicial no indutor é 0 A para que a simulação possa ser realizada com sucesso. Caso contrário, o SPICE usaria a corrente em regime permanente e a parte transiente não seria simulada corretamente.

```
analogia_massa_mola_amortecedor
```

```
Cm 1 0 0.5 IC=0.0V
Lk 1 0 0.01 IC=0.0A
Rb 1 0 2
If 0 1 5
.tran 0.1 10
.probe
.end
```

Figura 12 – Descrição SPICE do circuito massa-mola-amortecedor do exemplo.

Os resultados da simulação SPICE são apresentados na Figura 13 e na Figura 14. Na Figura 13 é apresentado um gráfico da tensão sobre o capacitor no tempo. Neste gráfico, a tensão representa a velocidade da massa no sistema mecânico. Inicialmente a velocidade da massa é igual a 0 m/s . O sistema oscila e entra em regime permanente. Quando o $t \cong \infty$, a velocidade da massa é novamente igual a 0 m/s . A massa tende a ir para uma posição final. Realizando a integração desta curva, obtém-se a posição da massa no tempo. No gráfico da Figura 14, a posição final é igual a 5 cm , como o esperado. O coeficiente da mola $k = 100 \text{ N/m}$ e a força sobre a massa é igual a 5 N , logo, o deslocamento final $F/k = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$.

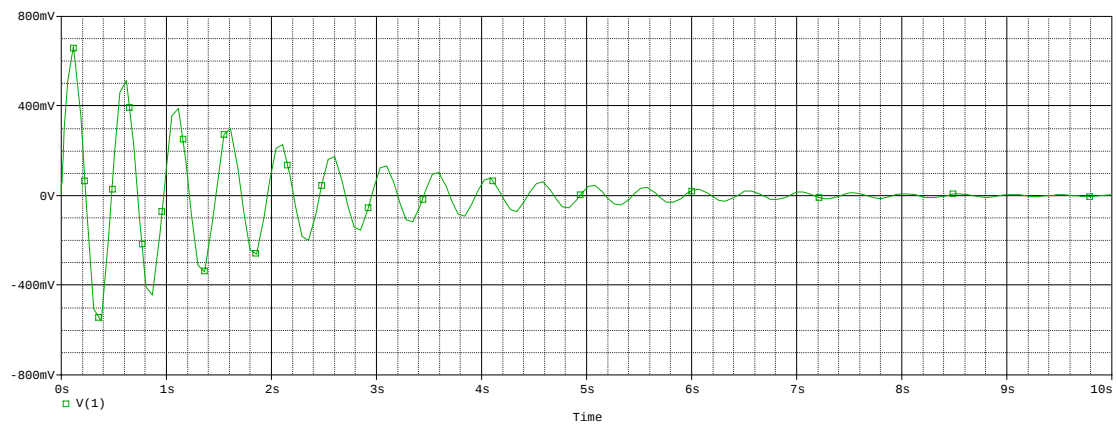


Figura 13 – Gráfico da tensão sobre o capacitor C_m .

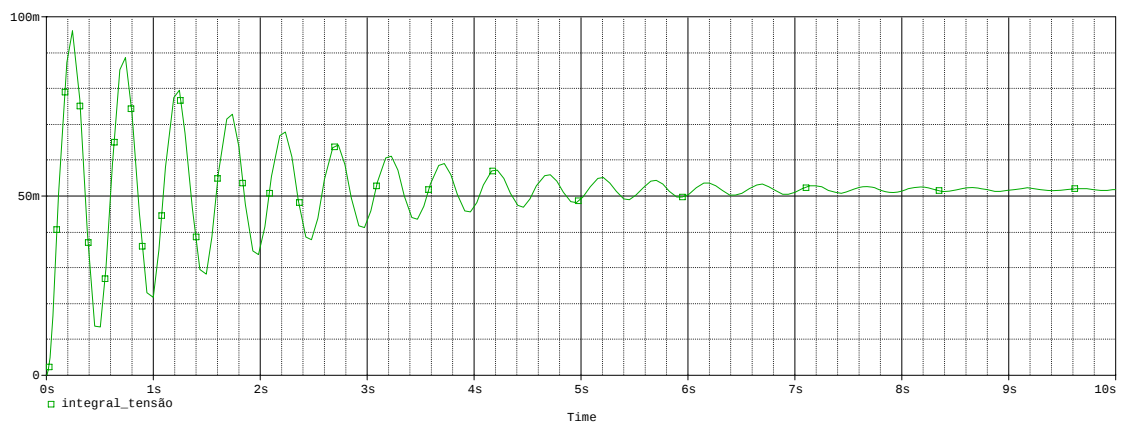


Figura 14 – Gráfico da integral da tensão sobre o capacitor no tempo.